РГР2 Анализ решений взаимно двойственных задач линейного программирования

Индивидуальное задание

Для изготовления трех видов продукции (А, В, С) используется три вида ресурсов (1, 2, 3). Объем ресурса $(b_i,\ \ i=\overline{1,3})$, нормы его расхода a_{ij} на единицу продукции и цена $(c_j,\ \ j=\overline{1,3})$ продукции заданы таблицей (номер таблицы соответствует номеру варианта).

По заданной таблице:

1. Составьте математическую модель определения оптимального плана выпуска продукции из условия ее максимальной стоимости.
2. Составьте математическую модель двойственной задачи.
3. Дайте экономическую интерпретацию двойственной задачи.
4. Решите исходную задачу симплекс-методом.
5. Используя теоремы двойственности, найдите оптимальное решение двойственной задачи.
6. Определите дефицитность ресурсов. Расположите ресурсы в порядке убывания дефицитности.
7. Найдите интервалы устойчивости двойственных оценок (пределы изменения запасов ресурсов).
8. Найдите интервалы устойчивости оптимального решения (пределы изменения коэффициентов целевой функции).
9. Определите изменение максимальной стоимости продукции при изменении объема ресурсов на величину $\Delta b_i = 0{,}1 \cdot b_i \quad (i=\overline{1,3})$, предварительно установив, находятся ли эти изменения в интервалах устойчивости двойственных оценок. Оцените раздельное и суммарное влияние этих изменений.
10. Оцените целесообразность введения в план новой продукции, для которой заданы: цена c_4 = 10 и вектор-столбец $(1, 2, 1)^T$, задающий нормы затрат ресурсов на производство этой продукции.
11. Оцените целесообразность закупки дополнительно 30 единиц первого ресурса по цене p_1 = 3 у. е.

Таблица 1

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	100	1	6	1
2	300	1	3	1
3	250	1	4	3
Цена продукции		1	4	3

Таблица 2

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	100	5	6	7
2	300	4	5	6
3	250	7	1	2
Цена продукции		3	5	6

Таблица 3

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	120	1	3	2
2	150	2	1	4
3	75	3	7	1
Цена продукции		5	10	12

Таблица 4

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	120	8	5	4
2	150	3	8	1
3	75	2	5	6
Цена продукции		5	10	12

Таблица 5

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	125	2	1	1
2	175	3	2	1
3	250	1	4	3
Цена продукции		2	4	3

Таблица 6

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	125	3	4	6
2	175	5	4	3
3	250	2	6	7
Цена продукции		2	4	3

Таблица 7

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	190	1	2	5
2	120	12	4	9
3	60	7	1	3
Цена продукции		10	11	13

Таблица 8

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	190	5	4	3
2	120	7	1	8
3	60	4	3	7
Цена продукции		10	11	13

Таблица 9

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	180	4	3	1
2	90	4	5	9
3	120	2	1	6
Цена продукции		12	5	3

Таблица 10

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	180	5	4	6
2	90	7	6	8
3	120	1	5	8
Цена продукции		12	5	3

Таблица 11

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	100	1	3	5
2	150	6	4	2
3	300	1	3	7
Цена продукции		3	4	6

Таблица 12

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	100	6	7	4
2	150	2	5	1
3	300	3	4	5
Цена продукции		3	4	6

Таблица 13

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	200	2	4	5
2	180	1	2	6
3	300	8	3	4
Цена продукции		13	5	2

Таблица 14

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	200	3	5	70
2	180	4	5	8
3	300	1	5	1
Цена продукции		13	5	2

Таблица 15

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	70	6	4	2
2	140	7	11	10
3	200	4	5	8
Цена продукции		12	13	9

Таблица 16

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	70	3	2	1
2	140	5	6	7
3	200	1	2	5
Цена продукции		12	13	9

Таблица 17

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	100	9	2	1
2	300	1	3	1
3	250	2	9	3
Цена продукции		1	4	1

Таблица 18

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	100	4	8	2
2	300	8	4	3
3	250	2	3	5
Цена продукции		12	5	3

Таблица 19

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	120	1	3	2
2	150	2	1	1
3	75	2	2	1
Цена продукции		5	10	12

Таблица 20

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	120	7	2	1
2	150	4	5	8
3	75	6	4	2
Цена продукции		10	20	8

Таблица 21

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	125	2	1	1
2	175	8	2	1
3	250	3	4	3
Цена продукции		2	4	4

Таблица 22

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	125	1	2	3
2	175	4	3	4
3	250	3	4	2
Цена продукции		13	12	8

Таблица 23

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	150	1	8	2
2	120	3	1	4
3	60	1	8	3
Цена продукции		10	11	12

Таблица 24

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	150	3	4	1
2	120	5	2	8
3	60	6	7	4
Цена продукции		15	14	9

Таблица 25

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	190	2	2	5
2	120	4	5	9
3	60	7	1	6
Цена продукции		12	9	25

Таблица 26

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	210	5	6	3
2	100	4	2	8
3	90	4	3	5
Цена продукции		10	11	13

Таблица 27

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	180	4	4	2
2	100	6	5	9
3	120	2	1	6
Цена продукции		12	5	3

Таблица 28

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	90	3	2	4
2	120	5	3	7
3	180	3	2	5
Цена продукции		12	13	9

Таблица 29

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	120	9	2	2
2	210	3	3	1
3	250	2	9	3
Цена продукции		1	4	1

Таблица 30

Ресурс	Объем ресурса	Нормы расхода		
		A	B	C
1	120	3	8	2
2	300	5	4	3
3	220	2	4	5
Цена продукции		12	5	3

Пример решения и анализа двойственных задач линейного программирования

В качестве примера двойственных задач рассмотрим следующую задачу.

Пример 1. Фирма выпускает продукцию A, B, C, D, используя для ее производства три вида ресурсов в количестве соответственно 260, 400, 240 единиц. Расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и цена единицы каждого вида продукции заданы таблицей:

Вид ресурса	Объем ресурса	Нормы расхода ресурсов			
		A	B	C	D
1	260	2	1	3	1
2	400	1	2	1	2
3	240	2	0	1	2
Цена, у.е.		1	4	2	5

Определить план выпуска продукции, обеспечивающий фирме максимум стоимости выпускаемой продукции, и оценить каждый вид ресурсов. Оценки, приписываемые каждому ресурсу, должны быть такими, чтобы оценка всех ресурсов была минимальной, а суммарная оценка ресурсов, используемых на производство единицы каждого вида продукции, – не меньше цены единицы продукции данного вида.

Решение. Обозначим через $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$ план выпуска продукции. Тогда математическая модель задачи нахождения оптимального плана, максимизирующего суммарную стоимость продукции, примет вид:

$$F = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \le 260, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 400, \\ 2x_1 + \phantom{2x_2 +{}} x_3 + 2x_4 \le 240, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,4}).$$

Поставим в соответствие первому ресурсу оценку y_1, второму – y_2, третьему – y_3. Тогда общая оценка ресурса, используемого на производство продукции, составит:

$$Z = 260y_1 + 400y_2 + 240y_3.$$

Цель задачи – минимизировать эту величину.

Суммарная оценка ресурса, необходимого для производства единицы продукции A, равна

$$2y_1 + y_2 + 2y_3.$$

Согласно условию задачи эта величина должна быть не меньше цены единицы продукции A, т.е.

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1.$$

Из аналогичных соображений получаем:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 4, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 2, \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 5. \end{cases}$$

Естественно предположить, что оценки y_1, y_2, y_3 неотрицательны, т.е. $y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$

Итак, получаем математическую модель двойственной задачи:

$$Z = 260y_1 + 400y_2 + 240y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1, \\ y_1 + 2y_2 \quad \ge 4, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \ge 2, \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 5, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,3})$$

которую называют *двойственной* к задаче оптимального выпуска продукции из имеющихся ресурсов.

Компоненты y_1^*, y_2^*, y_3^* оптимального плана $Y^*(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ называют *оптимальными оценками ресурсов.* Это оценки ресурсов в условиях *конкретной* задачи. Одни и те же ресурсы для разных предприятий представляют различную ценность. Изменение запасов ресурсов приводит к необходимости их переоценки. Следуя Л.В. Канторовичу, будем называть их *объективно обусловленными оценками*.

Оптимальные решения прямой и двойственной задач будут найдены позже.

Пример 2. Для задачи оптимального использования ресурсов (см. пример 1), математическая модель которой имеет вид:

$$F = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \le 260, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 400, \\ 2x_1 + \qquad x_3 + 2x_4 \le 240, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

требуется:

1) определить интервалы устойчивости двойственных оценок;

2) установить величину максимальной стоимости продукции при изменении объема ресурсов: первого на – 40 единиц; второго – на +30 единиц, третьего – на 50 единиц. Оценить раздельное влияние этих изменений и суммарное их влияние на стоимость продукции;

3) оценить целесообразность введения в план производства фирмы четвертого вида продукции, нормы затрат ресурсов на единицу которого соответственно равны 3, 2, 8, а цена составляет 9 у.е.;

4) оценить целесообразность дополнительной закупки 100 единиц третьего ресурса по цене 0,25 у.е.

Решение

1. Прежде всего перейдем к каноническим формам моделей, введя неотрицательные балансовые переменные. Для прямой задачи добавим x_5, x_6, x_7, для двойственной - вычтем $y_4 ... y_7$:

$$F = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 260, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 400, \\ 2x_1 + \qquad x_3 + 2x_4 + x_7 = 240, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,7}).$$

$$Z = 260y_1 + 400y_2 + 240y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4 = 1, \\ y_1 + 2y_2 - y_5 = 4, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 - y_6 = 2, \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_7 = 5, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,7})$$

В Excel обе модели можно представить следующим образом:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b
y1	2	1	3	1	1	0	0	260
y2	1	2	1	2	0	1	0	400
y3	2	0	1	2	0	0	1	240
y4	-1	0	0	0				= Zmin
y5	0	-1	0	0				
y6	0	0	-1	0				
y7	0	0	0	-1				
Fmax =	1	4	2	5	c			

Рисунок 1 – Взаимно двойственные модели ЗЛП

Эта форма представления потребуется в дальнейшем для анализа чувствительности решения.

Далее будем решать прямую задачу.

В качестве базисных выберем балансовые переменные и представим исходную симплекс-таблицу в виде:

	b\f	x1	x2	x3	x4	b
	x5	2	1	3	1	260
	x6	1	2	1	2	400
	x7	2	0	1	2	240
Fmax	-cj	-1	-4	-2	-5	0

Выполняя известные итерации

	b\f	x1	x2	x3	x4	b	b/ai
	x5	2	1	3	1	260	260
	x6	1	2	1	2	400	200
	x7	2	0	1	2	240	120
Fmax	-cj	-1	-4	-2	-5	0	

	b\f	x1	x2	x3	x7	b	b/ai
	x5	1	1	2,5	-0,5	140	140
	x6	-1	2	0	-1	160	80
	x4	1	0	0,5	0,5	120	
Fmax	-cj	4	-4	0,5	2,5	600	

в итоге получим:

	b\f	x1	x6	x3	x7	bb
	x5	1,5	-0,5	2,5	0	60
	x2	-0,5	0,5	0	-0,5	80
	x4	1	0	0,5	0,5	120
Fmax	-cj	2	2	0,5	0,5	920

Принимая во внимание соответствие переменных

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
y4	y5	y6	y7	y1	y2	y3

последнюю симплекс-таблицу представим в виде:

f\b		y4	y2	y6	y3	Zmin
	b\f	x1	x6	x3	x7	bb
y1	x5	1,5	-0,5	2,5	0	60
y5	x2	-0,5	0,5	0	-0,5	80
y7	x4	1	0	0,5	0,5	120
Fmax	-cj	2	2	0,5	0,5	920

Сдвоенная линия обозначает знак равенства, поэтому в отношение целевых функций справедливы выражения:

$F_{\max} + 2x_1 + 2x_6 + 0{,}5x_3 + 0{,}5x_7 = 920$ или $F_{\max} = 920 - 2x_1 - 2x_6 - 0{,}5x_3 - 0{,}5x_7$;

$Z_{\min} = 60y_1 + 80y_5 + 120y_7 + 920$ или $Z_{\min} - 60y_1 - 80y_5 - 120y_7 = 920$.

Как видно из таблицы, базисными переменными в оптимальном решении X являются переменные x_5, x_2, x_4, а в оптимальном решении Y - y_4, y_2, y_6, y_3 :

0	80	0	120	60	0	0
x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
y4	y5	y6	y7	y1	y2	y3
2	0	0,5	0	0	-2	0,5

Определим интервалы устойчивости двойственных оценок (допустимые изменения ресурсов).

Для этого в исходной модели (рис. 1) выразим базисные переменные: x_5, x_2, x_4 через свободные:

$$AX = B \quad \rightarrow \quad A_B X_B + A_F X_F = B \tag{1}$$

x5	x2	x4		x1	x6	x3	x7		b
1	1	1		2	0	3	0		260
0	2	2	+	1	1	1	0	=	400
0	0	2		2	0	1	1		240

$$X_B + A_B^{-1} A_F X_F = A_B^{-1} B, \quad \text{где} \quad D = A_B^{-1} \tag{2}$$

		D			b		bb
x5		1	-0,5	0	260		60
x2	=	0	0,5	-0,5	400	=	80
x4		0	0	0,5	240		120

Т.о. надо выписать матрицу коэффициентов при базисных переменных: x_5, x_2, x_4 в первоначальной системе ограничений и найти обратную ей матрицу:

$$A_B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix},\quad A_B^{-1}=D=\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&1/2&-1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}.$$

Из (2) следует, что варьируя значения ресурсов b, значения базисных переменных будут изменяться, но обязательным условием является их неотрицательность. Из этого требования определяем пределы изменения запасов dbi как в сторону уменьшения,

				db1	db2	db3		
x5		60		1	-0,5	0		0
x2	=	80	-	0	0,5	-0,5	>=	0
x4		120		0	0	0,5		0

так и в сторону их увеличения

				db1	db2	db3		
x5		60		1	-0,5	0		0
x2	=	80	+	0	0,5	-0,5	>=	0
x4		120		0	0	0,5		0

Эти условия в привычной форме записи имеют вид:

$$\begin{pmatrix}60\\80\\120\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&1/2&-1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta b_1^H\\\Delta b_2^H\\\Delta b_3^H\end{pmatrix}\ge\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}60\\80\\120\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&1/2&-1/2\\0&0&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta b_1^B\\\Delta b_2^B\\\Delta b_3^B\end{pmatrix}\ge\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Теперь можем воспользоваться формулами для нахождения нижней и верхней границ интервалов устойчивости оценок по видам ресурсов.

Используя формулы $\Delta b_i^H=\min\limits_{d>0}\left\{\dfrac{b_j}{d_{ij}}\right\}$; $\quad \Delta b_i^B=\min\limits_{d<0}\left\{\dfrac{b_j}{|d_{ij}|}\right\}$,

Найдем необходимые пределы:

Ресурс 1. Нижняя граница: $\Delta b_1^H=\min\limits_{d>0}\left\{\dfrac{b_j}{d_{1j}}\right\}=\dfrac{60}{1}=60.$

Верхняя граница: $\Delta b_1^в=\infty$, так как среди элементов первого столбца матрицы D нет отрицательных.

Итак, $\Delta b_1\in(-60,\infty)$, т.е. первый ресурс может изменяться в интервале:

$$(b_1-\Delta b_1^H,\, b_1+\Delta b_1^в)=(260-60,\infty)=(200,\infty),$$

при этом оптимальный план двойственной задачи остается неизменным.

Аналогичные рассуждения позволяют найти интервалы устойчивости оценок для второго и третьего ресурсов.

Ресурс 2. Нижняя граница: $\Delta b_2^H=\min\limits_{d>0}\left\{\dfrac{b_j}{d_{2j}}\right\}=\dfrac{80}{0,5}=160.$

Верхняя граница: $\Delta b_2^B=\min\limits_{d<0}\left\{\dfrac{b_j}{|d_{2j}|}\right\}=\dfrac{60}{|-0,5|}=120$.

Итак, $\Delta b_2\in(-160;120)$.

Получаем интервал устойчивости оценок по отношению ко второму ограничению:

$$(b_2 - 160,\ b_2 + 120) = (240, 520).$$

Ресурс 3. Нижняя граница: $\Delta b_3^H = \min\limits_{d>0}\left\{\dfrac{b_j}{d_{3j}}\right\} = \dfrac{120}{0,5} = 240.$

Верхняя граница: $\Delta b_3^B = \min\limits_{d<0}\left\{\dfrac{b_j}{|d_{3j}|}\right\} = \dfrac{80}{|-0,5|} = 160$.

Интервал устойчивости оценок по отношению к третьему ограничению имеет вид:

$$(b_3 - \Delta b_3^н, b_3 + \Delta b_3^в) = (240 - 240, 240 + 160) = (0, 400).$$

Найдем интервалы устойчивости оптимального решения (пределы изменения коэффициентов целевой функции).

Для этого в исходной модели (рис. 1) выразим базисные переменные двойственной задачи: y_4, y_6, y_2, y_3 через свободные:

$$Y^T A = C^T \quad \rightarrow \quad Y_B^T A_B + Y_F^T A_F = C^T \tag{3}$$

y4	-1	0	0	0
y2	1	2	1	2
y6	0	0	-1	0
y3	2	0	1	2
		+		
y1	2	1	3	1
y5	0	-1	0	0
y7	0	0	0	-1
		=		
	1	4	2	5
c				

$$Y_B^T = -Y_F^T A_F A_B^{-1} + C^T A_B^{-1}, \quad \text{где} \quad D = A_B^{-1} \tag{4}$$

	y4	y2	y6	y3
		=		
y1	1,5	-0,5	2,5	0
y5	-0,5	0,5	0	-0,5
y7	1	0	0,5	0,5
		+		
cb	2	2	0,5	0,5

Т.о. надо выписать матрицу коэффициентов при базисных переменных: y_4, y_6, y_2, y_3 в первоначальной системе ограничений двойственной задачи и найти обратную ей матрицу.

Выпишем строки y_4, y_6, y_2, y_3 из исходной расширенной матрицы А (см. рис.1)

y4	-1	0	0	0
y6	0	0	-1	0

y2	1	2	1	2
y3	2	0	1	2

Найдем обратную D

D=	-1	0	0	0
	-0,5	0	0,5	-0,5
	0	-1	0	0
	1	0,5	0	0,5

Из (4) следует, что варьируя значения коэффициентов C целевой функции, значения базисных переменных будут изменяться, но обязательным условием является их неотрицательность. Из этого требования определяем пределы изменения коэффициентов Ci как в сторону уменьшения, так и в сторону их увеличения

	y4	y2	y6	y3	
		=			
	2	2	0,5	0,5	cb
		-			
dc1	-1	0	0	0	
dc2	-0,5	0,5	0	-0,5	
dc3	0	0	-1	0	D
dc4	1	0	0,5	0,5	
		>=			
	0	0	0	0	

	y4	y2	y6	y3	
		=			
	2	2	0,5	0,5	cb
		+			
dc1	-1	0	0	0	
dc2	-0,5	0,5	0	-0,5	
dc3	0	0	-1	0	D
dc4	1	0	0,5	0,5	
		>=			
	0	0	0	0	

Эти условия в привычной форме записи имеют вид: $y_B^T + \Delta c^T A_B^{-1} \geq 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 2 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta c_1^H & \Delta c_2^H & \Delta c_3^H & \Delta c_4^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 2 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta c_1^B & \Delta c_2^B & \Delta c_3^B & \Delta c_4^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Используя формулы $\Delta c_i^H = \min\limits_{d>0} \left\{ \dfrac{y_j}{d_{ij}} \right\}$; $\quad \Delta c_i^B = \min\limits_{d<0} \left\{ \dfrac{y_j}{|d_{ij}|} \right\}$,

Найдем необходимые пределы:

$\Delta c_1^H = \infty$; $\quad \Delta c_1^B = \min\limits_{d<0} \left\{ \dfrac{2}{|-1|} \right\} = 2$; $\quad (c_1 - \Delta c_1^H, c_1 + \Delta c_1^B) = (1-\infty, 1+2) = (-\infty, 3)$;

$\Delta c_2^H = \min\limits_{d>0} \left\{ \dfrac{2}{1/2} \right\} = 4$; $\quad \Delta c_2^B = \min\limits_{d<0} \left\{ \dfrac{2}{1/2}; \dfrac{1/2}{1/2} \right\} = 1$; $\quad (c_2 - \Delta c_2^H, c_2 + \Delta c_2^B) = (0,5)$;

$$\Delta c_3^H = \infty; \qquad \Delta c_3^B = \min_{d<0}\left\{\frac{1/2}{|-1|}\right\} = 1/2; \qquad \left(c_3 - \Delta c_3^H, c_3 + \Delta c_3^B\right) = \left(2-1, 2+\infty\right) = \left(1, \infty\right);$$

$$\Delta c_4^H = \min_{d>0}\left\{\frac{2}{1}; \frac{1/2}{1/2}; \frac{1/2}{1/2}\right\} = 1; \qquad \Delta c_4^B = \infty; \ \left(c_4 - \Delta c_4^H, c_4 + \Delta c_4^B\right) = \left(5-1, 5+\infty\right) = \left(4, \infty\right);$$

Далее оценим влияние изменения объема ресурсов

$$(\Delta b_1 = -40; \quad \Delta b_2 = 30; \quad \Delta b_3 = 50)$$

на величину максимальной стоимости продукции. Замечаем, что все величины Δb_i находятся в пределах интервалов устойчивости двойственных оценок, поэтому, согласно теореме об оценках, можно определить раздельное и суммарное влияние этих изменений.

Раздельное влияние:

$$\Delta F_{\max}^1 \approx -40 \cdot 0 = 0, \text{ т.е.}$$

уменьшение запаса первого ресурса на 40 единиц не приводит к изменению F_{max};

$$\Delta F_{\max}^2 \approx 30 \cdot 2 = 60;$$

$$\Delta F_{\max}^3 \approx 50 \cdot 1/2 = 25.$$

Совместное влияние изменений всех ресурсов приводит к изменению максимальной стоимости продукции F_{max} на величину

$$\Delta F_{\max} \approx \sum_{i=1}^{3} \Delta F_{\max}^i = 0 + 60 + 25 = 85.$$

Иными словами, мы нашли оптимальное значение целевой функции

$$F_{\max} \approx 920 + 85 = 1005$$

для задачи:

$$F = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \le 220, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 400, \\ 2x_1 + \qquad x_3 + 2x_4 \le 290, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

Оценим целесообразность введения в план производства фирмы пятого вида продукции. Для этого определим, в каком отношении находятся цена c_5=9 пятого вида продукции и суммарная оценка $\sum_{i=1}^{3} a_{i5} \cdot y_i^*$ затрат ресурсов на производство одной единицы этой продукции:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i5} \cdot y_i^* = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 1/2 = 8.$$

Очевидно, $\sum_{i=1}^{3} a_{i5} \cdot y_i^* < c_5$. Так как цена реализации продукции превышает затраты на ее производство, то введение в план производства пятого вида продукции выгодно.

Оценим теперь эффективность мероприятия по «расшивке» узких мест.

Пусть имеется возможность приобрести дополнительно 100 единиц третьего ресурса по цене $p_3 = 0{,}25$ у.е. Изменение третьего ресурса $\Delta b_3 = 100$ находится в пределах устойчивости двойственных оценок, поэтому его влияние на величину максимальной стоимости продукции можно определить с помощью теоремы об оценках:

$$\Delta F_{\max}^{3} \approx y_3^* \cdot \Delta b_3 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50 \text{ у.е.}$$

Затраты ΔP на приобретение 100 единиц третьего ресурса:

$$\Delta P = p_3 \cdot \Delta b_3 = 0{,}25 \cdot 100 = 25 \text{ у.е.}$$

Таким образом, данное мероприятие является эффективным, оно обеспечивает дополнительную прибыль в объеме:

$$\Delta F_{\max} \approx \Delta F_{\max}^{3} - \Delta P = 50 - 25 = 25 \text{ у.е.}$$

Эта прибыль достигается лишь за счет рационального перераспределения ресурсов и соответствующей корректировки плана в связи с увеличением лимита дефицитного ресурса.